**Тема лекции: Производная сложной функции, зависящей от двух переменных. Полный дифференциал и полная производная сложной функции. Экстремум функции двух переменных**.

---

**Цель лекции: Сформировать понимание производной сложной функции, полного дифференциала и критериев экстремума функции двух переменных.**

---

**Основные вопросы:**

- Производная сложной функции двух переменных
- Полный дифференциал функции
- Производная неявные функции
- Производные высших порядков
- Экстремум функции двух переменных
- Необходимые и достаточные условия экстремума

Как и для случая функции одной переменной, под сложной функцией нескольких переменных мы будем понимать композицию из нескольких функций нескольких переменных. Число этих функций и их переменных может быть различным. Для определенности мы ограничимся случаем, когда все функции составляющие сложную функцию зависят от двух переменных.

**Определение.**

**Сложной функцией (композицией)** *составленной из функции* $z = f(u, v)$, $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ *называется* ***функция двух переменных*** $(x, y)$ *вида* $z = f(u(x, y), v(x, y))$.

**Теорема 1.** *Пусть функции* $u = u(x, y)$ *и* $v = v(x, y)$ *имеют частные производные по* $x$ *и* $y$ *в точке* $(x_0, y_0)$, *а функция* $z = f(u, v)$ *и ее частные производные по* $u$ *и* $v$ *непрерывны в окрестности точки* $(u_0, \vartheta_0)$, *где* $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. *Тогда сложная функция*

$$z = f(u(x, y), v(x, y)) \qquad (1)$$

*имеет частные производные в точке* $(x_0, y_0)$ *и они равны соответственно*

$$z_x' = f_u' u_x' + f_v' v_x',$$
$$z_y' = f_u' u_y' + f_v' v_y'. \qquad (2)$$

***Доказательство.*** Пусть $\Delta_x u$ и $\Delta_x v$– частные приращения функции $u$ и $v$ в точке $(x_0, y_0)$ соответствующие приращению $\Delta x$ аргумента $x$. Тогда функция $z = f(u, v)$ имеет полный дифференциал в точке $(u_0, v_0)$ и ее приращение $\Delta z$ записывается в виде

$\Delta z = f_u' \cdot \Delta_x u + f_v' \cdot \Delta_x v + \alpha \Delta_x u + \beta \Delta_x v.$

Здесь $\alpha$ и $\beta$ бесконечно малые при $(\Delta u, \Delta v) \to (0,0)$.

Разделим обе части последнего равенства на $\Delta x$ получим

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = f'_x \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + f'_v \frac{\Delta_x v}{\Delta x} + \alpha \cdot \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + \beta \frac{\Delta_x v}{\Delta x}.$$

Перейдем в обеих частях этого соотношения к пределу при $\Delta x \to 0$, учитывая, что

$\frac{\Delta_x u}{\Delta x} \to u'_x$, $\frac{\Delta_x v}{\Delta x} \to v'_x$, $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$, получим требуемое равенство

$z'_x = f'_u u'_x + f'_v v'_x.$

Второе равенство доказывается аналогично.

***Пример***. Пусть

$z = {}^{u}/_{v}$,

$u = e^{x+y}$,

$v = ln(xy)$.

Найдем частные производные сложной функции составленной из этих функций.

$$z'_x = \left(\frac{u}{v}\right)'_u (e^{x+y})'_x + \left(\frac{u}{v}\right)'_v \big(ln(xy)\big)'_x = \frac{1}{v}e^{x+y} - \frac{u}{v^2}\frac{y}{xy} = \frac{e^{x+y}}{ln(xy)} - \frac{e^{x+y}}{x\big(ln(xy)\big)^2}$$

$$z'_y = \left(\frac{u}{v}\right)'_u (e^{x+y})'_y + \left(\frac{u}{v}\right)'_v \big(ln(xy)\big)'_y = \frac{1}{v}e^{x+y} - \frac{u}{v^2}\frac{x}{xy} = \frac{e^{x+y}}{ln(xy)} - \frac{e^{x+y}}{y\big(ln(xy)\big)^2}$$

Пусть имеется функция двух переменных $z = f(x, y)$ и функция одной переменной $y = y(x)$ тогда производная по $x$ сложной функции

$$z = f(x, y(x))$$

*называется* **полной производной** и обозначается через ${}^{dz}/_{dx} = f'_x + f'_y \cdot y'_x$.

***Пример***. Пусть $z = x^2 + y^2$ и $y = sin\, x$.

Найдем частную и полную производные по $x$ этой функции.

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x.$

$\frac{dz}{dx} = (x^2 + y^2)'_x + (x^2 + y^2)'_y (sin\, x)' = 2x + 2y\, cos\, x = 2x + 2\, sin\, x\, cos\, x.$

Функцию одной переменной $y = y(x)$ можно задавать с помощью уравнения, содержащего $x$ и $y$ вида

$F(x, y) = 0.$

Функция $y = y(x)$, заданная с помощью такого уравнения *называется* **неявной.**

***Пример***. График функции $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ является верхней полуокружностью радиуса $R$. Эту же функцию можно задать и в неявном виде

$x^2 + y^2 - R^2 = 0,$

который, кроме указанной, определяет еще функцию

$y = -\sqrt{R^2 - x^2}$.

Иногда неявным образом заданную функцию в явном виде записать не удается. Однако с помощью следующей теоремы производную такой функции можно найти.

***Теорема 2.*** *Пусть функция* $z = F(x, y)$ *и ее частные производные* $F'_x$ *и* $F'_y$ *непрерывны в окрестности точки* $(x_0, y_0)$, *где* $F(x_0, y_0) = 0$ *и* $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. *Тогда уравнение* $F(x, y) = 0$ *задает в некоторой окрестности точки* $x_0$ *дифференцируемую функцию* $y = y(x)$ *и в этой окрестности ее производная равна*

$$y' = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)} \qquad (6)$$

***Доказательство.*** Оставим без доказательства факты существования и дифференцируемости функции $y = y(x)$. Докажем формулу (6). Для этого найдем полную производную по $x$ от обеих частей уравнения

$F(x.y) = 0,$

получим

$F'_x + F'_y \cdot y'_x = 0.$

Учитывая, что в некоторой окрестности $(x_0, y_0)$ $F'_y \neq 0$, решим относительно $y'_x$ последнее уравнение:

$$F'_y \cdot y'_x = -F'_x$$

$y'_x = -{F'_x}/{F'_y}.$

***Пример.*** Найдем производную $y'$ функции заданной с помощью уравнения

$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$

$y'_x = -\frac{(x^2+y^2-R^2)'_x}{(x^2+y^2-R^2)'_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$

Заметим, что в это соотношение можно подставить не любые $x$ и $y$, а только $x$ и $y$лежащие на окружности радиуса $R$ с центром в начале координат (т.е. при $x^2 + y^2 = R^2$) и $y \neq 0$.

Например, если $x = \frac{\sqrt{2}}{2}R$ и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}R$, то

$y'_x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}R\right) = -\frac{\sqrt{2/2}R}{\sqrt{2/2}R} = -1.$

***Определение.*** *Функция* $z = z(x, y)$, *заданная с помощью уравнения*

$F(x, y, z) = 0$*называется* ***неявной функцией двух переменных***.

Для таких функций возможно обобщение теоремы 2.

***Теорема 3.*** *Пусть функция* $u = F(x, y, z)$ *и ее частные производные* $F'_x$, $F'_y$, $F'_z$ *непрерывны в окрестности точки* $(x_0, y_0, z_0)$, *где*

$F(x_0, y_0, z_0) = 0$ *и* $F_z'(x_0, y_0, z_0) \neq 0$,

*тогда уравнение*

$F(x, y, z) = 0$.

*задает в некоторой окрестности точки* $(x_0, y_0)$ *дифференцируемую функцию* $z = z(x, y)$ *и в этой окрестности ее частные производные равны*

$$z_x' = -\frac{F_x'(x.y.z)}{F_z'(x,y,z)}, \qquad z_y' = -\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x.y,z)}.$$

Доказательство этого факта аналогично доказательству теоремы 3.

***Пример.*** Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ определяет функции $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, графиками которых являются полусферы. Найдем частные производные по $x$ и $y$ этой неявной функции:

$$z_x' = -\frac{(x^2+y^2+z^2-R^2)_x'}{(x^2+y^2+z^2-R^2)_z'} = -\frac{2x}{2z} = -\frac{x}{z},$$

$$z_y' = -\frac{(x^2+y^2+z^2-R^2)_y'}{(x^2+y^2+z^2-R^2)_z'} = -{}^{y}/_{z}.$$

В эти формулы можно подставить только $(x, y, z)$ связанные соотношением

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ при $z \neq 0$.

Подобным образом можно определять и дифференцировать неявные функции любого числа переменных.

**Производные и дифференциалы высших порядков.**

**Определение.** ***Частной производной*** $k$ ***–го порядка*** *функции* $z = f(x, y)$ *называется частная производная от одной из ее производных* $(k - 1)$ *порядка.*

Это рекуррентное определение дает возможность получить $k$ –ую частную производную функцию путем нахождения последовательно $k$частных производных от этой функция. Сама функция $f(x, y)$ считается производной нулевого порядка.

Как мы установили ранее, производных первого порядка у функции $f(x, y)$ две $f_x'$ и $f_y'$. Взяв от этих производных производные по $x$ и $y$, получим четыре производных второго порядка:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}'' = (f_x')_x', \ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = f_{xy}'' = (f_x')_y', \ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = f_{yx}'' = (f_y')_x', \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}'' = (f_y')_y'.$$

Взяв от этих производных производные по $x$ и $y$, получим восемь частных производных третьего порядка и так далее. Производных $k$–го порядка у функции двух переменных имеется $2^k$.

**Определение**. *Частная производная функции, в которой присутствуют дифференцирования по разным переменным, называется* ***смешанной*** *производной.*

Смешанными производными второго порядка у функции двух переменных являются $f''_{xy}$ и $f''_{yx}$ .

**Теорема о смешанных производных**. *Пусть функция* $z = f(x, y)$ *и ее производные* $f'_x$, $f'_y$, $f''_{xy}$, $f''_{yx}$ *непрерывны в некоторой окрестности точки* $(x_0, y_0)$. *Тогда в этой точке ее смешанные производные второго порядка равны между собой:*

$$f''_{xy} = f''_{yx}.$$

**Следствие.** *Пусть все частные производные функции*

$$z = f(x.y)$$

*до* $(k-1)$*–го порядка включительно и все ее смешанные производные* $k$*–го порядка непрерывны в некоторой окрестности т.* $M_0(x_0, y_0)$. *Тогда в этой точке ее смешанные производные* $k$*–го порядка отличающиеся только очередностью дифференцирования совпадают.*

Это следствие обосновывает следующее обозначение смешанной производной $k$–го порядка, в которой встречается $m$ дифференцирований по $x$ и $(k-m)$ по $y$:

$$\frac{\partial^k f}{(\partial x)^m (\partial y)^{k-m}}.$$

При выполнении условий следствия, порядок в котором производятся эти дифференцирования не влияет на результат.

**Пример**. Пусть $f(x, y) = x^3 y^3$. Найдем $\frac{\partial^4 f}{(\partial x)^2 (\partial y)^2}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y^3;\ \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2} = 6xy^3;\ \frac{\partial^3 f}{(\partial x)^2\, \partial y} = 18xy^2;\ \frac{\partial^4 f}{(\partial x)^2 (\partial y)^2} = 36xy.$$

При любом другом порядке дифференцирования в котором будут по два дифференцирования по $x$ и по $y$ результат получится тем же.

**Определение**. *Функция* $z = f(x, y)$*, имеющая все непрерывные частные производные до* $k$*–го порядка включительно в окрестности точки* $M_0(x_0, y_0)$ *, называется* $k$ ***раз дифференцируемой*** *в этой точке.*

**Определение**. *Пусть функция* $z = f(x, y)$ $k$ *раз дифференцируема в* $x_0$ . ***Полным дифференциалом*** *этой функции* $k$***–го порядка*** *называется полный дифференциал от ее* *полного дифференциала* $(k-1)$*–го порядка, вычисленный в предположении, что* $dx$ *и* $dy$ *остаются постоянными.*

Он обозначается через $d^k f$.

Так, например $d^2f = d(df) = d(f_x'dx + f_y'dy) = (f_x'dx + f_y'dy)_x'dx +$

$$+(f_x'dx + f_y'dy)_y'dy = f_{xx}''(dx)^2 + f_{yx}'dydx + f_{xy}''dxdy + f_{yy}''(dy)^2 =$$

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(dy)^2. \qquad (4)$$

Подобным образом можно получить формулу для полного дифференциала третьего порядка:

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{(\partial x)^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{(\partial x)^2\,\partial y}(dx)^2dy + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x(\partial y)^2}dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{(\partial y)^3}(dy)^3. \ (5)$$

Заметим, что коэффициенты при частных производных в формуле для этих полных дифференциалов совпадают с коэффициентами в формуле бинома Ньютона. Запишем формулу для нахождения $d^k f$ функции $z = f(x,y)$:

$$d^k f = \frac{\partial^k f}{(\partial x)^k}(dx)^k + k\frac{\partial^k f}{(\partial x)^{k-1}\,\partial y}(dx)^{k-1}dy + \cdots + \frac{k!}{i!\,(k-i)!}\frac{\partial^k f}{(\partial x)^{k-i}(\partial y)^i}(dx)^{k-i}(dy)^i +$$

$$+ \cdots + k\frac{\partial^k f}{\partial x(\partial y)^{k-1}}dx(dy)^{k-1} + \frac{\partial^k f}{(\partial y)^k}(dy)^k$$

$$= \sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!\,(k-i)!}\frac{\partial^k f}{(\partial x)^{k-i}(\partial y)^i}(dx)^{k-i}(dy^i) \quad (6)$$

Эти полные дифференциалы используются в частности для приближенных вычислений значений функции $f(x_0 + \varDelta x, y_0 + \varDelta y)$. Ранее нами была получена формула для приближенного нахождения этой величины с помощью первого дифференциала:

$$f(x_0 + \varDelta x, y_0 + \varDelta y) \approx f(x_0, y_0) + df.$$

Взяв достаточное число полных дифференциалов, можно найти указанное значения с любой наперед заданной точностью с помощью формулы Тейлора, которая в данном случае имеет вид:

$$f(x_0 + \varDelta x, y_0 + \varDelta y) \approx f(x_0, y_0) + df + \frac{d^2 f}{2!} + \frac{d^3 f}{3!} + \cdots + \frac{d^k f}{k!}. \qquad (7)$$

Условия применимости этой формулы и оценка ее погрешности в рамки нашего курса не входят.

**Пример**. Найдем $d^2 f$ для функции $z = x^3 + y^3 + x^2y^2$.

Найдем все частные производные второго порядка этой функции

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2xy^2;\ \frac{\partial^2 z}{(\partial x)^2} = \frac{\partial(3x^2+2xy^2)}{\partial x} = 6x + 2y^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 + 2x^2y; \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial(3x^2+2xy^2)}{\partial y} = 4xy; \frac{\partial^2 z}{(\partial y)^2} = \frac{\partial(3y^2+2x^2y)}{\partial y} = 6y + 2x^2.$$

**Подставив эти производные в формулу, (4) получим**

$$d^2f = (6x + 2y^2)(dx)^2 + 8xydxdy + (6y + 2x^2)(dy)^2.$$

Если заданы $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $dx = dy = 0{,}1$, то

$$d^2f(x_0, y_0) = 8(0{,}1)^2 + 8(0{,}1)^2 + 8(0{,}1)^2 = 0{,}24.$$

**Экстремумы функции нескольких переменных**.

**1. Определение.** *Точка $M_0(x_0, y_0)$ называется* ***точкой максимума*** *функции $z = f(x, y)$, если у этой точки имеется окрестность $U(M_0)$ такая, что для всех $(x, y)$ из этой окрестности выполняется неравенство*

$$f(x.y) \leq f(x_0, y_0).$$

*Если для всех $(x, y)$ из окрестности $U(M_0)$ выполняется неравенство*

$$f(x, y) \geq f(x_0, y_0),$$

*то точка $M_0$ называется* ***точкой минимума***.

*Значение функции в точке максимума $f(x_0, y_0)$, называется* ***максимумом*** *функции, а ее значение в точке минимума –* ***минимумом***.

Точки максимума и минимума называются **экстремальными точками** функции, а максимумы и минимумы называются **экстремумами** функции.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0$. Если в $M_0$ каждая частная производная $f'_x$ и $f'_y$ равна нулю или не существует, то $M_0$ называется **критической точкой** функции $z = f(x, y)$.

Следующая теорема является аналогом необходимого условия экстремума функции одной переменной.

**Теорема 1** ***(необходимое условие экстремума)***

*Если $M_0(x_0, y_0)$ является экстремальной точкой функции $z = f(x, y)$, то $M_0$ – критическая точка этой функции.*

***Доказательство.*** Рассмотрим функцию одного переменного $x$ $z = f(x, y_0) = g(x)$. Из определения экстремальной точки следует, что точка $M_0$– экстремальная для функции $g(x)$. Согласно необходимому условию экстремума для функции одной переменной, $M_0$ критическая точка этой $g(x)$, т.е.

$$g'(x_0) = f_x'(x_0, y_0) = \left[\begin{matrix} 0 \\ \text{не существует.} \end{matrix}\right.$$

**Рассмотрев функцию** $z = f(x_0, y) = \boldsymbol{h}(y)$,

получим, что

$$h'(0) = f_y'(x_0, y_0) = \left[\begin{matrix} 0 \\ \textit{не} \text{ сущестует.} \end{matrix}\right.$$

**Пример.** Точка $O(0,0)$ является точкой минимума функции $z = x^2 + y^2$ т.к. $z(0,0) = 0$, а для всех остальных точек $(x, y)$ $z(x, y) > 0$.

Поскольку $z_x' = 2x$ и $z_y' = 2y$, то решение системы

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

определяет критическую точку $O(0,0)$.

**Пример.** Точка $O(0,0)$ не является экстремальной точкой функции $z = x^2 - y^2$, т.к. в любой ее окрестности функция принимает как значения больше $z(0,0) = 0$ при $y = 0$, так и значения меньше $O$ при $x = 0$. Тем не менее, поскольку $z_x' = 2x$, $z_y' = -2y$, координаты $(0,0)$ удовлетворяют системе

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0\text{'} \end{cases}$$

то точка $O$ критическая точка.

Этот пример показывает, что критическая точка может не быть экстремальной.

График функции $z = x^2 - y^2$ является гиперболическим параболоидом, имеющим форму седла, точка $O(0,0)$ *называется его* **седловой точкой**.

**Теорема 4.** ***(Достаточные условия экстремума.)***

*Пусть функция $z = f(x, y)$ трижды дифференцируема в некоторой окрестности своей критической точки $M_0(x_0, y_0)$.*
*Обозначим $f_{xx}''(x_0, y_0) = A$, $f_{xy}''(x_0, y_0) = B$, $f_{yy}''(x_0, y_0) = C$, $D = AC - B$.*

*Тогда:*

*1) Если $D > 0$, то точка $M_0$ экстремальная для функции $z = f(x,y)$, причем если $A > 0$ $(C > 0)$, то это точка минимума, а если $A < 0$ $(C < 0)$, то точка $M_0$, точка максимума.*

*2) Если $D < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремума нет.*

Заметим дополнительно, что при $D = 0$ для определения экстремума требуется дополнительное исследование.

Без доказательства.

**Пример.** Найдем экстремальные точки и экстремумы функции

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

Поскольку $f'_x = 3x^2 - 3y$ и $f'_y = 3y^2 - 3x$ существуют для всех $(x,y)$ то, для определения критических точек необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x = x^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases}.$$

Отсюда получаем два решения:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{и} \begin{cases} x_2 = 1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

и две критические точки $M_1(0,0)$ и $M_2(1,1)$. Найдем вторые частные производные функции и исследуем каждую из этих точек помощью достаточного условия экстремума.

$$f''_{xx} = (3x^2 - 3y)'_x = 6x,\ f''_{xy} = (3x^2 - 3y)'_y = -3,\ f''_{yy} = (3y^2 - 3x)'_y = 6y.$$

а) $M_1(0,0)$. В этом случае

$$A = f''_{xx}(0,0) = 0;\ B = f''_{xy}(0,0) = -3;\ C = f''_{yy}(0,0) = 0;\ D = AC - B^2 = -9 < 0.$$

Поэтому в точке $M_1$ экстремума нет.

б) $M_2(1,1)$. В этом случае

$$A = f''_{xx}(1,1) = 6; B = f''_{xy}(1,1) = -3;\ C = f''_{yy}(1,1) = 6; D = AC - B^2 = 36 - 9 = 27 > 0$$

поэтому $M_2$ экстремальная точка. Поскольку $A, C > 0$, то это точка минимума. Значение функции в $M_2$ равно $f(1,1) = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$, что составляет минимум функции.

**Контрольные вопросы**:

1. Что такое сложная функция двух переменных?

2. Как вычислить частные производные сложной функции?

3. Что называется неявной функцией?

4. Какова формула производной неявной функции?

5. Как определить тип критической точки?

6. Когда смешанные производные равны?

**Рекомендуемая литература:**

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы математического анализа.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального анализа.

4. Краснов М.Л. Сборник задач по матанализу.